Surface de cercle

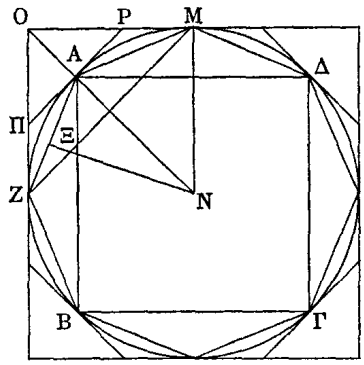
Bien sûr on sait tous le faire, mais d'où vient cette formule ?

1) Calcul de π :

π =	3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 ... ...

Il est connu depuis plus de 4000 ans.
Par exemple pour les Babyloniens, vers -2000, il valait 3 + 1/8 = 3,125
Pour les Égyptiens vers -1650, il valait $(16/9)^2 = 3,16$

C'est Archimède (-287, -212) qui, en l'an - 250, a utilisé un algorithme de calcul.



Il a mesuré le périmètre par la méthode de la « quadrature », c'est à dire qu'il y a un polygone inscrit dans le cercle qui lui-même est inscrit dans un autre polygone.
Le périmètre réel du cercle est donc encadré par les périmètres de ces 2 polygones.

$$\pi = \frac{périmètre}{diamètre} \quad \Rightarrow \quad périmètre = 2\,\pi\,R$$

3 + 10/71 < π < 3 + 1/7

Il est arrivé à l'excellente approximation : π = 220 / 71

π est la première lettre du mot grec **περιμετρον** qui veut dire périmètre.

Aujourd'hui il existe des méthodes plus rigoureuses pour calculer π.

Par exemple la série d'Euler :

$$\pi = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7\times 9} + ...\right)$$

Par la méthode des nombres complexes : Pour tout nombre complexe *z*, on a :

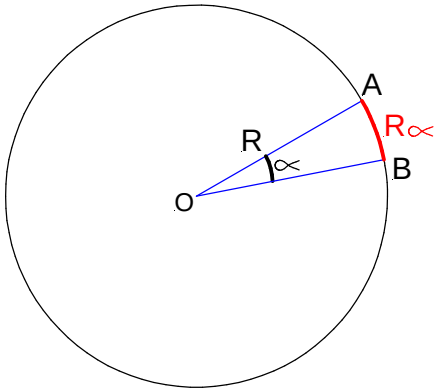
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad avec \qquad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

Sachant que π est le plus petit nombre tel que : « cos(π) = -1 », la résolution des équations ci-dessus donne le nombre π.

Kanada et Tamura ont calculé π avec 206 milliards de décimales en environ 33 heures de calculs.

À titre de curiosité, il existe des poèmes dont le nombre de lettres de chaque mot correspond aux décimales de π.
Un de ces poèmes est cité en annexe de ce document.

2) Calcul de la surface du cercle selon la méthode d'Archimède :



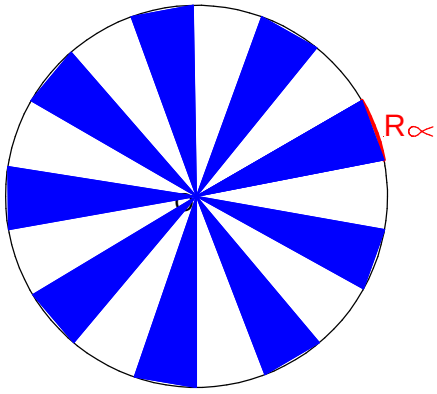
Maintenant qu'on sait calculer le périmètre, comment calculer la surface ?

Archimède a découpé son cercle en 96 tranches.
Pour plus de précision, nous allons faire tendre le nombre de tranches vers l'infini en faisant tendre α vers zéro.

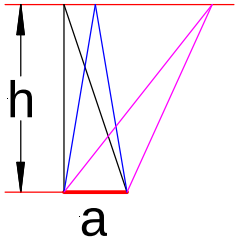
Si $\alpha \to 0$ $\Rightarrow$ Corde AB = Arc AB = R α

La surface du cercle sera la somme d'une infinité de triangles de base = R α et de hauteur = R

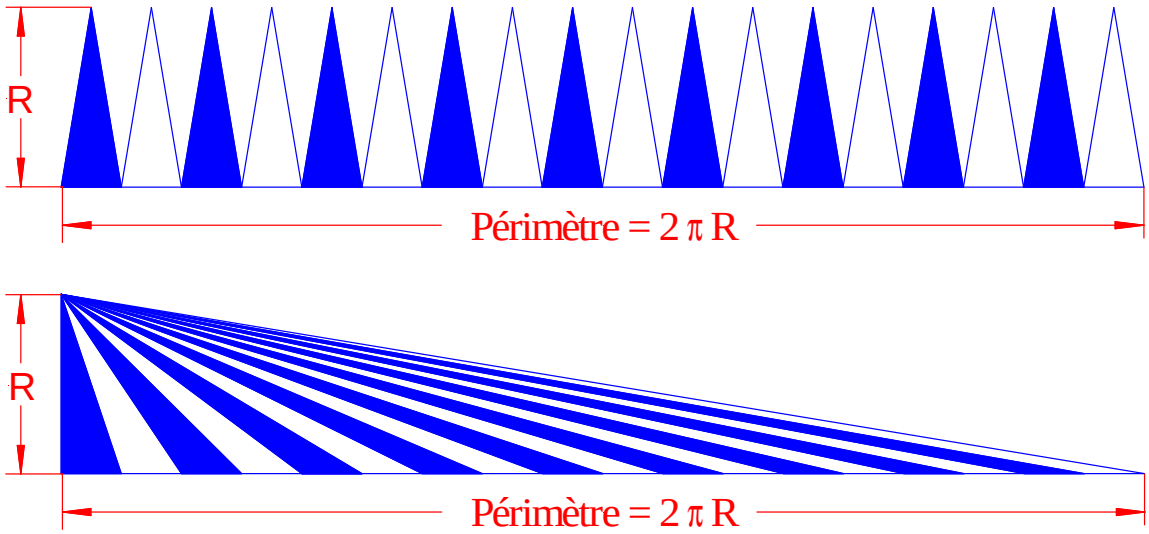
On va donc dérouler le cercle :



Rappel : La surface d'un triangle reste la même quelle que soit son inclinaison.
Elle est toujours égale à (a x h) / 2



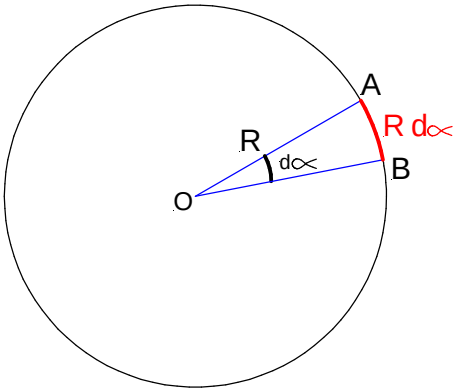
Dans la représentation ci-dessous du cercle déroulé, nous pourrons donc incliner tous les triangles vers un sommet commun sans que leur surface ne soit modifiée.



La somme des surfaces de tous les triangles est égale à la surface du triangle global de hauteur égale à « R » et de base égale à « 2 π R », donc égale à (R x 2 π R) / 2

$$\Rightarrow S = \pi R^2$$

3) Par le calcul d'intégrale en coordonnées polaires :



$d\alpha \to 0$
La surface du triangle OAB = $(R^2 d\alpha) / 2$
La surface du cercle est :

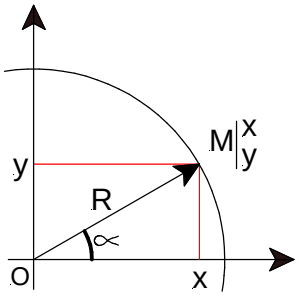
$$S = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\alpha$$

$$S = \left[\frac{R^2 \alpha}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{R^2 2\pi}{2} - \frac{R^2 0}{2} = \frac{R^2}{2}(2\pi - 0)$$

$$S = \pi R^2$$

4) Par le calcul d'intégrale en coordonnées cartésiennes :

En coordonnées cartésiennes on a va calculer l'aire d'un quart de cercle:



Soit un ensemble de points $M(x, y)$ tels que : $x^2 + y^2 = R^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

On fait un changement de variable :

$x(\alpha) = R \cos \alpha$ *donc* $dx = x'(\alpha) = -R \sin \alpha \, d\alpha$

Les bornes d'intégration devront être changées :
Pour x = 0 on a $\alpha = \pi / 2$ et pour x = R on a $\alpha = 0$
Ce qui donne :

Rappel : $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$

$$S = -\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \alpha}\; R \sin \alpha \, d\alpha = -\int_{\pi/2}^{0} R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}\; R \sin \alpha \, d\alpha = -R^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

Rappel : $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

$$S = -\frac{R^2}{2} \int_{\pi/2}^{0} [1 - \cos(2\alpha)]\, d\alpha = -\frac{R^2}{2} \left[\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right]_{\pi/2}^{0} = -\frac{R^2}{2} \left[\left(0 - \frac{\sin(0)}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} \right) \right]$$

$$S = -\frac{R^2}{2} \left[0 - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi R^2}{4}$$

S étant la surface du quart de cercle, la surface du cercle $= \pi R^2$

ANNEXE :

Voici un des poèmes qui permettent de retrouver les décimales de π. Ici, 126 décimales.

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !	**3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5**
Immortel Archimède, artiste ingénieur,	**8 9 7 9**
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?	**3 2 3 8 4 6 2 6**
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.	**4 3 3 8 3 2 7 9**
Jadis, mystérieux, un problème bloquait	**5 0 2 8 8**
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose	**4 1 9 7 1 6 9**
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.	**3 9 9 3 7 5**
0 quadrature ! Vieux tourment du philosophe	**1 0 5 8 2 9**
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez	**9 7 4 9 4 4**
Défié Pythagore et ses imitateurs.	**5 9 2 3 0**
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?	**7 8 1 6 4 0**
Former un triangle auquel il équivaudra ?	**6 2 8 6 2 0**
Nouvelle invention : Archimède inscrira	**8 9 9 8**
Dedans un hexagone ; appréciera son aire	**6 2 8 0 3 4**
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :	**8 2 5 3 4 2 1 1 7**
Dédoublera chaque élément antérieur ;	**0 6 7 9**
Toujours de l'orbe calculée approchera ;	**8 2 1 4 8 0**
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur	**8 6 5 1 3 2 8**
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle	**2 3 0 6 6 4 7**
Professeur, enseignez son problème avec zèle	**0 9 3 8 4 4**