Les Suites Géométriques

1) Définition d'une suite géométrique :

On appelle suite géométrique une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre appelé raison de la suite géométrique

Relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n \; q$

La raison de cette suite est : « q »

1er cas : Soit une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison **q**.
Attention : Le premier terme est U_0 et il y a (n + 1) termes.

Rang « n »	0	1	2	3	……	n
Terme U_n	U_0	U_1 $= q.U_0$	U_2 $= q.U_1$ $= q^2.U_0$	U_3 $= q.U_2$ $= q^3.U_0$	……	U_n $= q.U_{n-1}$ $= q^n.U_0$
Nbre de termes	1	2	3	4		n + 1

2ème cas : Soit une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison **q**.
Attention : 1er terme est U_1, et il y a n termes au lieu des (n + 1) du cas précédent

Rang « n »	1	2	3	4	……	n
Terme U_n	U_1	U_2 $= q.U_1$	U_3 $= q.U_2$ $= q^2.U_1$	U_4 $= q.U_3$ $= q^3.U_1$	……	U_n $= q.U_{n-1}$ $= q^{(n-1)}.U_1$
Nbre de termes	1	2	3	4		n

Dans la suite de ce cours nous resterons dans le premier cas (1er terme U_0). Toutes les démonstrations et les formules resteront les mêmes à condition de faire attention quand on devra remplacer « n » par « n + 1 » ou l'inverse

2) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison **q**.

Rang « n »	0	1	2	3	……	n
Terme U_n	U_0	U_1 $= q.U_0$	U_2 $= q.U_1$ $= q^2.U_0$	U_3 $= q.U_2$ $= q^3.U_0$	……	U_n $= q.U_{n-1}$ $= q^n.U_0$
Nbre de termes	1	2	3	4		n + 1

$S = U_0 + U_0\,q + U_0\,q^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_0\,q^{n-1} + U_0\,q^n$

On va calculer le produit $S.q$:

$S\,q = U_0\,q + U_0\,q^2 + U_0\,q^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_0\,q^n + U_0\,q^{n+1}$

Si on calcule $(S - S\,q)$ *on obtient* :

$$\begin{array}{rl} S & = U_0 + U_0\,q + U_0\,q^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_0\,q^n \\ -S\,q & = \quad -U_0\,q - U_0\,q^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - U_0\,q^n - U_0\,q^{n+1} \\ \hline S - S\,q & = U_0 - U_0\,q^{n+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad S\,(1-q) = U_0\,(1-q^{n+1})$$

$$S = \frac{U_0\,(1-q^{n+1})}{(1-q)} = \frac{U_0\,(q^{n+1}-1)}{q-1}$$

La suite a pour premier terme : U_0 *et il y a* $(n+1)$ *termes*

La somme des n premiers termes est : $S = (\textit{premier terme})\,\dfrac{q^{(\textit{nombre de termes})} - 1}{q-1}$

Dans le 1^{er} *cas, on aura* : $S = U_0\,\dfrac{q^{(n+1)} - 1}{q-1}$ *Dans le* $2^{ème}$ *cas on aura* : $S = U_1\,\dfrac{q^n - 1}{q-1}$

3) La factorielle :

La factorielle d'un entier naturel *n* est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à *n*. On note la factorielle de *n* : ***n !***

$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n$

$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ *quand* $n \to \infty$

4) Résolution d'un problème :

Une légende orientale raconte qu'en 3000 AV JC, le roi Belkib, souverain des Indes, voulut récompenser le sage Sissa, inventeur du jeu d'échecs.
Il lui demanda ce qu'il voulait. Le sage Sissa lui répondit :
« Sire, donnez-moi un grain de blé pour la 1ère case, 2 pour la 2ème, 4 pour la 3ème, et ainsi doublez le nombre de grains pour toutes les cases suivantes jusqu'à la 64ème. »
Le roi fut d'abord heureux. On ne lui demandait que quelques grains de blé !
Puis il demanda à ses mathématiciens de compter.....
1 grain pour la première case
2 grains pour la deuxième case
4 grains pour la troisième case
8 grains pour la quatrième case
etc...

Nous n'aurons pas besoin de compter les grains sur les cases.
Nous allons utiliser une suite géométrique.

Questions :
- Combien de grains de blé sur la dernière case (il y en a 64)
- Quel est le total de grains de blé.

C'est une suite géométrique de premier terme : $\mathbf{U_0 = 1}$ et de raison : $\mathbf{q = 2}$
Il y a 64 termes (0 à 63), donc : $\mathbf{n = 63}$

Rang « n »	0	1	2	3	……	63
Terme U_n	U_0	U_1	U_2	U_3	……	U_n
	1	2	4	8		2^{63}

Donc sur la dernière case on a $U_n = 2^{63}$ grains de blé

La somme sera : $S = 2^{64} - 1$ donc $S = 2^{64}$ car on peut oublier le « - 1 » devant « 2^{64} »

S = 18 446 744 073 709 600 000 Ou plus simplement : $\mathbf{S \approx 1{,}845.\ 10^{19}}$

Sachant que le poids moyen d'**un grain de blé** est de **0,05 g** soit $\mathbf{0{,}05.10^{-6}}$ **tonnes**

On obtient : **922 337 203 685 tonnes** Ou plus simplement : $\mathbf{9{,}22.10^{11}}$ **tonnes**

La production mondiale de blé (aujourd'hui, pas en -3000) est d'environ : 700 000 000 tonnes

Le salaire demandé par le sage Sissa correspond donc à **1 318 ans** de la production mondiale actuelle de blé.

Ça fait beaucoup ...
Je ne sais pas comment s'est terminée cette transaction.