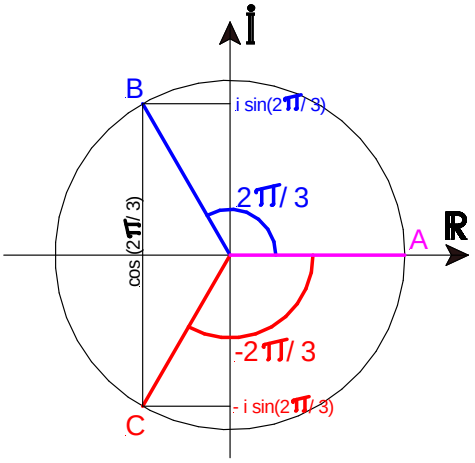
Racines cubiques de 1

Cette méthode de résolution a été inventée par Jérôme CARDAN (1501-1576) qui a créé le nombre *i* tel que $i^2 = -1$ justement dans ce but. Il en avait besoin pour résoudre l'équation du 3ème degré. (Voir cours sur le polynome du 3ème degré)

Dans un plan complexe « 1 » admet 3 racines correspondant aux points A, B et C.



A | 1 ; 0

B | cos (2π/ 3) ; i sin(2π/ 3)

C | cos (2π/ 3) ; - i sin(2π/ 3)

Rappel :
On définit « i » tel que :
$i^2 = -1$

Les trois racines sont :

Première racine : 1

Deuxième racine : $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Troisième racine : $\varpi = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Nous allons le démontrer pour : ω (*pour* ϖ *la démonstration est identique*)

$$\omega^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$\omega^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\left(\frac{i.\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{(-1).3}{4}\right) + \left(\frac{i\,(-1)\,3\sqrt{3}}{8}\right)$$

En regroupant les termes réels entre eux et les termes imaginaires entre eux, on otient :

$$\omega^3 = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\left(\frac{(-1)\,3}{4}\right) + i\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$$ *Le terme imaginaire est nul*

$$\omega^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = 1$$ *On a démontré que* : $\omega^3 = 1$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{1} = 1 \; ; \quad \omega \text{ et } \varpi$$