ASYMPTOTES OBLIQUES

Si quand x tend vers ± ∞ une fonction f(x) tend vers une valeur constante (= a) c'est qu'elle admet une asymptote horizontale : y = a
Si quand x tend vers une valeur constante (= a) la fonction tend vers ∞ c'est qu'elle admet une asymptote verticale : x = a

Une fonction qui tend vers ± ∞ quand x tend vers ± ∞ peut admettre une asymptote oblique.
Pour savoir si la fonction f (x) admet une asymptote oblique, alors on pose :
g(x) = f (x) - (a x + b) avec a ≠ 0
Si g(x) → 0 quand x → ∞ alors f (x) admet une asymptote oblique : y = a x + b

$$a = \lim\left(\frac{f(x)}{x}\right) \qquad b = \lim\left[f(x) - (a\,x + b)\right]$$

Exemple : Étude de la fonction : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

1) x tend vers + ∞

$g(x) = f(x) - a\,x - b$ avec $a \neq 0$ On va vérifier si $g(x) \to 0$ quand $x \to \infty$

On met "x" en facteur : $g(x) = x\left[\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - \frac{a\,x}{x} - \frac{b}{x}\right] = x\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x}\right]$

$\lim_{x\to\infty}(g(x)) = x\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x}\right] = x\,(2 - a)$ qui s'annule si $a = 2$

On vérifie en calculant "a" : $a = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 2\,x) = \lim_{x\to\infty}\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 2\,x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$

On multiplie par l'expression conjuguée :

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2 + x + 1) - (x^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

On met $\frac{x}{x}$ en facteur : $b = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\,(1 + 0)}{x\,(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; b = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Asymptote de $f(x)$ quand $x \to \infty$ $\qquad y = 2\,x + \frac{1}{2}$

2) x tend vers - ∞

Afin d'éviter d'avoir à utiliser $|x|$ et pour faciliter les calculs, on va effectuer le changement de variable suivant :

$z = -x \quad \Rightarrow$ quand $x \to -\infty$ on a $z \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(z) = -z + \sqrt{z^2 - z + 1}$

$g(z) = \sqrt{z^2 - z + 1} - z$ On multiplie par l'expression conjuguée :

$$g(z) = \frac{\left(\sqrt{z^2 - z + 1} - z\right)\left(\sqrt{z^2 - z + 1} + z\right)}{\left(\sqrt{z^2 + z + 1} + z\right)} = \frac{(z^2 - z + 1) - (z^2)}{\sqrt{z^2 + z + 1} + z} = \frac{1 - z}{\sqrt{z^2 + z + 1} + z}$$

$$\lim_{z \to \infty}(g(z)) = \frac{1 - z}{\sqrt{z^2 + z + 1} + z} = \frac{z\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z}\right)}{z\left(\sqrt{\frac{z^2}{z^2} + \frac{z}{z^2} + \frac{1}{z^2}} + \frac{z}{z}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -\frac{1}{2}$ Donc asymptote de $f(x)$ quand $x \to -\infty \qquad y = -\frac{1}{2}$

3) tracé de f(x) et de ses asymptotes :

